|  |
| --- |
| 结论十三：圆锥曲线中的一类定值问题 |
| 结论 | **在圆锥曲线(椭圆、双曲线、抛物线)中,曲线上的一定点P(非顶点)与曲线上的两动点A,B满足直线PA与PB的斜率互为相反数(倾斜角互补),则直线AB的斜率为定值.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **图示** | **条件** | **结论** |
|  | **已知椭圆**$\frac{x^{2}}{a^{2}}$**+**$\frac{y^{2}}{b^{2}}$**=1(a>b>0),定点P(x0,y0)(x0y0≠0)在椭圆上,设A,B是椭圆上的两个动点,直线PA,PB的斜率分别为kPA,kPB,且满足kPA+kPB=0.** | **直线AB的斜率kAB为****定值**$\frac{b^{2}x\_{0}}{a^{2}y\_{0}}$**.** |
|  | **已知双曲线**$\frac{x^{2}}{a^{2}}$**-**$\frac{y^{2}}{b^{2}}$**=1(a,b>0),定点P(x0,y0)(x0y0≠0)在双曲线上,设A,B是双曲线上的两个动点,直线PA,PB的斜率分别为kPA,kPB,且满足kPA+kPB=0.** | **直线AB的斜率kAB为****定值-**$\frac{b^{2}x\_{0}}{a^{2}y\_{0}}$**.** |
|  | **已知抛物线y2=2px(p>0),定点P(x0,y0)(x0y0≠0)在抛物线上,设A,B是抛物线上的两个动点,直线PA,PB的斜率分别为kPA,kPB,且满足kPA+kPB=0.** | **直线AB的斜率kAB为****定值-**$\frac{p}{y\_{0}}$**.** |

 |
| 解读 | 圆锥曲线中的定值问题一直是近几年来高考试题中的热点问题，这类问题在解题之前不知道定值是多少，因而对解题增添了一定的难度。解决这类问题时，要善于在动点的“变”中寻求定值或定点的“不变”性，再转化为有目标的一般性证明，从而解决问题。 |
| 典例 | 已知椭圆，圆，过椭圆上任一与顶点不重合的点引圆的两条切线，切点分别为，直线与轴，轴分别交于点，则（　　）A． B． C． D． |
| 解析 | 【答案】D【详解】设，则切线的方程为，切线的方程为，因为点在切线上，所以，，所以直线的方程为，所以，因为点在椭圆上，所以，所以， |
| 反思 | 【点睛】本题先设，则可得切线的方程，即可得到直线的方程，进而可求出点点的坐标，再结椭圆方程可求出的值，此题考查椭圆的标准方程，以及简单性质有应用，解题的关键是设点，再由已知条件得到直线的方程为，从而可得的坐标，进而可得答案，考查计算能力和转化能力，属于中档题 |
| 针对训练\*举一反三 |
| 1．已知点是抛物线的焦点，若点在抛物线上，且，斜率为的直线经过点，且与抛物线交于，（异于）两点，则直线与直线的斜率之积为（ ）A．2 B．-2 C． D．【答案】B【详解】由抛物线的定义知，则，解得，又点在抛物线上，代入，得，得，，所以，抛物线，因为斜率为的直线过点，所以的方程为，联立方程得，即，设，，由根与系数的关系得，则直线的斜率，直线的斜率，.2．已知，是双曲线的焦点，是过焦点的弦，且的倾斜角为，那么的值为A．16 B．12 C．8 D．随变化而变化【答案】A【详解】由双曲线方程知，，双曲线的渐近线方程为$y=\pm \frac{3}{4}x$，直线的倾斜角为，所以，又直线过焦点，如图，所以直线与双曲线的交点都在左支上.由双曲线的定义得，…………(1)，…………(2)，由(1)+(2)得，.figure3．已知椭圆的左右顶点分别为，过轴上点作一直线与椭圆交于两点（异于），若直线和的交点为，记直线和的斜率分别为，则（　　）A． B．3 C． D．2【答案】A【详解】设，，，设直线的方程：，由和三点共线可知 ，解得： ，，（\*）联立 ，得，，，代入（\*）得， ， ，. figure4．如图，已知抛物线的焦点为*F*，过点的直线交抛物线于*AB*两点，直线*AF*，*BF*分别与抛物线交于点*M*、*N*，记直线*MN*的斜率为，直线*AB*的斜率为，则\_\_\_\_\_\_\_\_．figure【答案】2【详解】，，，，则，设直线的方程为，将其代入，消去，整理得，∴，同理可得，有，设直线的方程为，代入，整理得，∴，∴.figure5．已知椭圆的离心率为，过点且斜率为的直线与椭圆交于两点，点关于原点的对称点为，设直线的斜率为，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_.【答案】【详解】设，，则，∴，，∵椭圆的离心率，∴，又，∴，∴椭圆的方程可化为，∵直线与椭圆交于两点，∴，，作差得，即，∴，6．已知椭圆的离心率，且与直线相切.figure（1）求椭圆的标准方程；（2）过椭圆上点作椭圆的弦，，若，的中点分别为，，若平行于，则，斜率之和是否为定值？【答案】（1）（2），斜率之和是为定值0.【解析】（1）根据题意知,，即，由，消去可得，因为椭圆与直线相切，所以判断式，解得，则，所以椭圆的标准方程为.（2）因为，的中点分别为，，直线平行于，所以，设直线的方程，，，联立方程，解得，由韦达定理可得,，，由中点坐标公式可得,，，，所以，斜率之和是为定值0.7．已知、是双曲线的两个顶点，点是双曲线上异于、的一点，为坐标原点，射线交椭圆于点，设直线、、、的斜率分别为、、、.（1）若双曲线的渐近线方程是，且过点，求的方程；（2）在（1）的条件下，如果，求的面积；（3）试问：是否为定值？如果是，请求出此定值；如果不是，请说明理由.【答案】（1）；（2）的面积为；（3）定值为.【解析】（1）由于双曲线的渐近线方程为，可设双曲线的方程为，将点的坐标代入双曲线的方程得，因此，双曲线的方程为；（2）设射线所在直线的方程为，设点，则，因为点在双曲线上，所以，可得.$∵k\_{1}+k\_{2}=\frac{y\_{0}}{x\_{0}+2}+\frac{y\_{0}}{x\_{0}−2}=\frac{2x\_{0}y\_{0}}{x\_{0}^{2}−4}=\frac{2x\_{0}y\_{0}}{4y\_{0}^{2}}=\frac{x\_{0}}{2y\_{0}}=\frac{1}{2k}=\frac{15}{8}$，.所以，射线所在直线的方程为.联立直线的方程与椭圆的方程，解得，所以，点的纵坐标为，因此，的面积为；（3）设点、，由于点在双曲线上，则，得，，，，同理可得，因此，.8．已知过点的直线交抛物线于两点，直线交轴于点．（1）设直线的斜率分别为，求的值；（2）点为抛物线上异于的任意一点，直线交直线于两点，，求抛物线的方程．【答案】（1）；（2）．【解析】（1）设直线的方程为：，点，联立方程组，得，所以，所以.（2）设点，直线当时，，同理，因为，，即，，所以，所以抛物线的方程为．9．设抛物线的焦点为,经过点的动直线交抛物线于点 且.(1)求抛物线的方程;(2)若为坐标原点),且点在抛物线上,求直线斜率;(3)若点M是抛物线的准线上的一点,直线MF,MA,MB斜率分别为 .求证:当为定值时,也为定值.【答案】（1）（2）（3）【解析】⑴根据题意可知：，设直线的方程为：，则：联立方程：，消去可得：（\*），根据韦达定理可得：，∴，∴：⑵设，则：，由（\*）式可得：，∴，又，∴，∴，∵，∴，∴，∴，∴直线的斜率，⑶可以验证该定值为，证明如下：设，则：，，∵，∴，∴，∴为定值。 |

